APRIL 2018

காலம் – 3 மணிகள் **மொத்த மதிப்பெண்கள்: 75**

குறிப்பு (1) பகுதி-அ மற்றும் பகுதி-ஆ, ஆகிய ஒவ்வொரு பகுதியிலிருந்து ஏதேனும் ஐந்து வினாக்களுக்கும், மற்றும் பகுதி-இ- ல் ஒவ்வொரு வினாவிலிருந்து ஏதேனும் இரு பிரிவுகளுக்கும் விடையளிக்கவும்.

(2) ஒவ்வொரு வினாவும் பகுதி-அ-ல் 2(இரண்டு) மதிப்பெண்கள், பகுதி-ஆ-ல் 3(மூன்று) மதிப்பெண்கள் மற்றும் பகுதி-இ-ல் ஒவ்வொரு பிரிவும் 5(ஐந்து) மதிப்பெண்கள் பெறும்.

பகுதி - அ

1. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற வட்டத்தின் மையம் மற்றும் ஆரத்தினைக் காண்க.

2. கூம்பு வளைவு - வரையறு

3. $\overrightarrow{a} = 2\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}$ மற்றும் $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + 5\,\overrightarrow{k}$ எனில் $2\vec{a} + 3\vec{b}$ காண்க.

4. $\overrightarrow{a} = 4\,\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j} - 6\vec{k}$ மற்றும் $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 3\,\overrightarrow{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று இணையானவை எனக் காட்டுக.

5. மதிப்பிடுக: $\int sec^2 5x\ dx$

6. மதிப்பிடுக: $\int \frac{dx}{9 + x^2}$

7. மதிப்பிடுக: $\int x \sin x\ \ dx$

8. மதிப்பிடுக: $\int_1^3 \left(4x - 5x^2\right) dx$

பகுதி - ஆ

9. $4x^2 + 10xy + y^2 - 2x + 5\,y - 3 = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு அதிபரவளையத்தைக் குறிக்கும் என நிரூபி.

10. $\vec{i} -2\vec{j} -2\vec{k}$ என்ற வெக்டரின் மீது $2\vec{i} + \vec{j} -2\vec{k}$ என்ற வெக்டரின் வீழல் காண்க.

11. $\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ மற்றும் $2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ ஆகிய வெக்டர்களை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாக கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

12. $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ மற்றும் $3\vec{i} + m\vec{j} + 5\vec{k}$ ஆகியவை ஒரு தளத்தில் அமைந்தவை எனில், 'm' - ன் மதிப்பு காண்க.

13. மதிப்பிடுக: $\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x} dx$

14. மதிப்பிடுக: $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-1}} dx$

15. மதிப்பிடுக: $\int x\, e^{-2x} dx$

16 மதிப்பிடுக: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

பகுதி - இ

17.(அ) ஒரு வட்டம் $(2, -3)$ என்ற புள்ளியின் வழிச் செல்வதும் மையம் $(-5, 1)$ ஐக் கொண்டதாகவும் உள்ளது எனில் அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(ஆ) $x^2 + y^2 - 10x - 24y + 120 = 0$ மற்றும் $x^2 + y^2 = 400$ எனும் சமன்பாடுகளைக் கொண்ட இரண்டு வட்டங்கள் ஒன்றை ஒன்று தொட்டுக் கொள்ளும் என நிரூபி .

(இ) $6x^2 + 13xy + 6y^2 + 8x + 7y + 2 = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும் என நிரூபி.

18.(அ) $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{i} -3\vec{j} -5\vec{k}$ மற்றும் $3\vec{i} -4\vec{j} -4\vec{k}$ என்ற வெக்டர்களை நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட மூன்று புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை உண்டாக்கும் என நிரூபி .

(ஆ) $\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}$ என்ற வெக்டரின் மீது $2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ என்ற வெக்டரின் வீழல் காண்க. மேலும் இரு வெக்டர்களுக்கும் இடையில் உள்ள கோணத்தைக் காண்க.

(இ) $3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$ மற்றும் $2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$ என்ற விசைகளின் செயல்பாட்டினால் ஒரு பொருள் $(1, 2, -1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $(5, -3, 4)$ என்ற புள்ளிக்கு இடம் பெயர்ந்தால் விசைகள் செய்த மொத்த வேலை எவ்வளவு.

19.(அ) $3\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ மற்றும் $4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ என்ற இரு வெக்டர்களுக்கு செங்குத்தாக உள்ள ஓரலகு வெக்டரைக் காண்க.மேலும் அவ்விரண்டு வெக்டர்களுக்கு இடையேயான கோணத்தின் மதிப்பையும் காண்க.

(ஆ) $6\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ என்ற விசை $(0, 1, -1)$ என்ற புள்ளி வழியே செலுத்தப்படுகிறது $(4, 3, -1)$ என்ற புள்ளியைப் பொறுத்து விசையின் திருப்புத்திறன் காண்க.

(இ) $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ மற்றும் $\vec{c} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ எனில் $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

20.(அ) மதிப்பிடுக: (i) $\int (x+1)(x+2)\,dx$ (ii) $\int \cos^3 x\,dx$

(ஆ) மதிப்பிடுக: (i) $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ (ii) $\int \tan^5 x \sec^2 x\,dx$

(இ) மதிப்பிடுக: (i) $\int \frac{dx}{64 - x^2}$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-(5x+1)^2}}$

21.(அ) மதிப்பிடுக: (i) $\int x \sin 5x\,dx$ (ii) $\int x \log x\,dx$

(ஆ) மதிப்பிடுக: (i) $\int x^2 \cos 2x\,dx$ (ii) $\int x^2 e^{-3x}\,dx$

(இ) மதிப்பிடுக: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\,dx$

விடைகள்

பகுதி - அ

1. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற வட்டத்தின் மையம் மற்றும் ஆரத்தினைக் காண்க.

விடை

மையம் $C = (-g, -f)$

மற்றும் ஆரம் $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

2. **கூம்பு வளைவு - வரையறு**

விடை நிலையான புள்ளியிலிருந்து ஒரு நிலையான நேர் கோட்டிற்கு எப்பொழுதும் **‘e’** மடங்கு மாறாத தூர விகிதத்தில் நகருகின்ற நகரும் புள்ளியின் இயங்குவரை கூம்பு வளைவு என வரையறுக்கிறோம்.

3. $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ மற்றும் $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ எனில் $2\vec{a} + 3\vec{b}$ காண்க.

விடை $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$

$$2\vec{a} + 3\vec{b} = 2(2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) + 3(\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k})$$

$$= 4\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} + 3\vec{i} - 3\vec{j} + 15\vec{k}$$

$$= 7\vec{i} - \vec{j} + 17\vec{k}$$

4. $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று இணையானவை எனக் காட்டுக.

விடை $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k}$

$$\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$\overrightarrow{a} = 2(2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} - 3\overrightarrow{k})$$

$$= 2(\overrightarrow{\boldsymbol{b}})$$

$\therefore \overrightarrow{a}$ மற்றும் $\overrightarrow{b}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று இணையானவை.

5. மதிப்பிடுக: $\int \boldsymbol{sec^2 5x\, dx}$

விடை

$$\int sec^2\, 5xdx = \frac{1}{5} tan\, 5x + c$$

6. மதிப்பிடுக: $\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{9 + x^2}}$

விடை

$$\int \frac{dx}{9 + x^2} = \int \frac{dx}{3^2 + x^2} = \frac{1}{3} tan^{-1}\left(\frac{x}{3}\right) + c$$

7. மதிப்பிடுக: $\int \boldsymbol{x \sin x\ dx}$

விடை

$$u = x \qquad\qquad dv = \sin x\ dx$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \qquad\qquad \int dv = \int \sin x\ dx$$

$$du = dx \qquad\qquad v = -cosx$$

$$\int \boldsymbol{u\, dv} = \boldsymbol{uv} - \int \boldsymbol{v\, du}$$

$$\int x \sin x\ dx = x(-cosx) - \int -cosx\, dx$$

$$= -xcosx + sinx + c$$

8. மதிப்பிடுக: $\int_1^3 (4x - 5x^2)dx$

விடை

$$\int_1^3 (4x - 5x^2)dx = \left[4\frac{x^2}{2} - 5\frac{x^3}{3}\right]_1^3$$

$$= \left[2x^2 - 5\frac{x^3}{3}\right]_1^3$$

$$= \left[\left(2\,(3^2) - 5\left(\frac{3^3}{3}\right)\right) - \left(2\,(1^2) - 5\left(\frac{1^3}{3}\right)\right)\right]$$

$$= \left[(18 - 45) - \left(2 - \frac{5}{3}\right)\right]$$

$$= (-27) - \left(\frac{6-5}{3}\right)$$

$$= (-27) - \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-81-1}{3} = \frac{-82}{3}$$

பகுதி - ஆ

9. $4x^2 + 10xy + y^2 - 2x + 5y - 3 = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு அதிபரவளையத்தைக் குறிக்கும் என நிரூபி.

விடை

$$4x^2 + 10xy + y^2 - 2x + 5y - 3 = 0 \text{ —— } (1)$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ —— } (2)$$

சமன்பாடு (1) மற்றும் (2) ஒப்பிட கிடைப்பது

$$a = 4,\ b = 1,\ 2h = 10 \Rightarrow h = 5,\ b = 1$$

அதிபரவளையத்தைக் குறிப்பதற்கான நிபந்தனை: $h^2 - ab > 0$

$$h^2 - ab = (5)^2 - (4)(1)$$

$$= 25 - 4 = 21 > 0$$

$\therefore$ கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு ஒரு **அதிபரவளையத்தைக்** குறிக்கும்.

10. $\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ என்ற வெக்டரின் மீது $2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ என்ற வெக்டரின் வீழல் காண்க.

விடை

$$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k},\ \vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = (2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) \bullet (\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k})$$

$$= (2)(1) + (1)(-2) + (-2)(-2)$$

$$= 2 - 2 + 4 = 4$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (-2)^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 4 + 4}$$

$$= \sqrt{9} = 3$$

$\vec{a}$ -ன் மீதான $\vec{b}$ -ன் வீழல் $= \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{b}|} = \dfrac{4}{3}$ அலகுகள்

11. $\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ மற்றும் $2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ ஆகிய வெக்டர்களை அடுத்தடுத்த பக்கங்களாக கொண்ட இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காண்க.

விடை

$$\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$$

$\therefore$ இணைகரத்தின் பரப்பு $= |\vec{a} \times \vec{b}|$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(2 - 3) - \vec{j}(2 - 6) + \vec{k}(1 - 2)$$

$$= \vec{i}(-1) - \vec{j}(-4) + \vec{k}(-1)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + (4)^2 + (-1)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 16 + 1}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{18}$$

$\therefore$ இணைகரத்தின் பரப்பு $= \sqrt{18}$ சதுர அலகுகள்

12. $2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}, \vec{\imath}+2\vec{\jmath}-3\vec{k}$ மற்றும் $3\vec{\imath}+m\vec{\jmath}+5\vec{k}$ ஆகியவை ஒரு தளத்தில் அமைந்தவை எனில், **'m'** - ன் மதிப்பு காண்க.

விடை

$$\vec{a} = 2\vec{\imath}-\vec{\jmath}+\vec{k}, \vec{b} = \vec{\imath}+2\vec{\jmath}-3\vec{k},$$
$$\vec{c} = 3\vec{\imath}+m\vec{\jmath}+5\vec{k}$$

ஒரு தளத்தில் அமைந்தவை எனில் $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & m & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$2\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ m & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & m \end{vmatrix} = 0$$

$$2(10+3m)+1(5+9)+1(m-6) = 0$$
$$20+6m+5+9+m-6 = 0$$
$$7m+28 = 0$$
$$7m = -28$$
$$\Rightarrow m = -4$$

13. மதிப்பிடுக: $\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}dx$

விடை

$$\int \frac{\cos^2 x}{1-\sin x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{1-\sin x}dx$$
$$= \int \frac{(1+\sin x)(1-\sin x)}{1-\sin x}dx$$
$$= \int (1+\sin x)dx = x-\cos x + c$$

14. மதிப்பிடுக: $\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-1}}dx$

விடை	$\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-1}}dx$ ----- (1)
$t = x^2-x-1$ $\frac{dt}{dx} = 2x-1$ $dt = (2x-1)\,dx$	$(1) \Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$ $= 2\sqrt{t}+c$ $= 2\sqrt{x^2-x-1}+c$

15. மதிப்பிடுக: $\int x\, e^{-2x} dx$

விடை

$$u = x \qquad dv = e^{-2x}\,dx$$

$$\frac{du}{dx} = 1 \qquad \int dv = \int e^{-2x} dx$$

$$du = dx \qquad v = \frac{e^{-2x}}{-2}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x\,e^{-2x}\,dx = \frac{x\,e^{-2x}}{-2} - \int \frac{e^{-2x}}{-2}\,dx$$

$$= \frac{x\,e^{-2x}}{-2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}\,dx$$

$$= \frac{x\,e^{-2x}}{-2} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right) + c$$

$$= \frac{x\,e^{-2x}}{-2} - \frac{e^{-2x}}{4} + c$$

16. மதிப்பிடுக: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

விடை

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = [\sin^{-1} x]_0^1$$

$$= \sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(0)$$

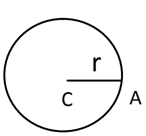
$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

<u>**பகுதி - இ**</u>

17.(அ) ஒரு வட்டம் **(2, – 3)** என்ற புள்ளியின் வழிச் செல்வதும் மையம் **(–5, 1).**ஐக் கொண்டதாகவும் உள்ளது எனில் அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

விடை $A = (2, -3)$, $C = (-5, 1)$ என்க

ஆரம் $CA(r) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



இங்கு $C = (x_1, y_1) = (-5\ ,\ 1\ )$; $A = (x_2, y_2) = (\ 2\ , -3\ )$

$$r = \sqrt{(2+5)^2 + (-3-1)^2}$$

$$= \sqrt{(7)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{49+16}$$

$$= \sqrt{65} \text{ அலகுகள்}$$

வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

இங்கு $r = \sqrt{65}$ மற்றும் $(h, k) = (-5\ ,\ 1\ )$

$$(x + \mathbf{5})^2 + (y - \mathbf{1})^2 = (\sqrt{65})^2$$

$$(x + \mathbf{5})(x + \mathbf{5}) + (y - \mathbf{1})(y - \mathbf{1}) = 65$$

$$x^2 + 5x + 5x + 25 + y^2 - y - y + 1 = 65$$

$$x^2 + y^2 + 10x - 2y + 26 - 65 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 10x - 2y - 39 = 0$$

என்பது தேவையான வட்டத்தின் சமன்பாடு ஆகும்.

17.(ஆ) $x^2 + y^2 - 10x - 24y + 120 = 0$ மற்றும் $x^2 + y^2 = 400$ எனும் சமன்பாடுகளைக் கொண்ட இரண்டுவட்டங்கள் ஒன்றை ஒன்று தொட்டுக் கொள்ளும் என நிரூபி .

விடை *: October 2016*-ல் ,பக்கம் எண்: 35 -ல், கணக்கு 17(b) -ல் நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது.

17.(இ) $6x^2 + 13xy + 6y^2 + 8x + 7y + 2 = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும் என நிரூபி.

விடை : *October 2017*-ல் ,பக்கம் எண்: 85 -ல், கணக்கு 17(c) -ல் நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது.

18.(அ) $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$ மற்றும் $3\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$ என்ற வெக்டர்களை நிலை வெக்டர்களாகக் கொண்ட மூன்று புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை உண்டாக்கும் என நிரூபி .

விடை

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \ , \overrightarrow{OB} = \vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OC} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{AB} = (\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}) - (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$$

$$\overrightarrow{AB} = \vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k} - 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{41} \text{ ----(1)}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{BC} = (3\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k}) - (\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k})$$

$$\overrightarrow{BC} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k} - \vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{6} \text{ ----(2)}$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$$

$\overrightarrow{CA} = (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) - (3\vec{i} - 4\vec{j} - 4\vec{k})$

$\overrightarrow{CA} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k} - 3\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$

$\boldsymbol{\overrightarrow{CA} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}}$

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-1)^2 + (3)^2 + (5)^2} = \sqrt{35}$ **----(3)**

$\Leftarrow |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$

$\sqrt{41}^2 = \sqrt{6}^2 + \sqrt{35}^2$

$41 = 6 + 35$

$41 = 41$

∴ கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை உருவாக்குகிறது.

18.(ஆ). $\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}$ என்ற வெக்டரின் மீது $2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ என்ற வெக்டரின் வீழல் காண்க. மேலும் இரு வெக்டர்களுக்கும் இடையில் உள்ள கோணத்தைக் காண்க.

விடை

$\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k}$

$\vec{a}$ -ன் மீதான $\vec{b}$ -ன் வீழல் $= \dfrac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{b}|}$

$\vec{a} \bullet \vec{b} = (2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) \bullet (\vec{i} - 4\vec{j} - 6\vec{k})$

$= (2)(1) + (1)(-4) + (3)(-6)$

$= 2 - 4 - 18$

$\boldsymbol{\vec{a} \bullet \vec{b}} = -20$

$|\vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$= \sqrt{(1)^2 + (-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{1 + 16 + 36} = \boldsymbol{\sqrt{53}}$

$\vec{a}$ -ன் மீதான $\vec{b}$ -ன் வீழல்= $\frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-20}{\sqrt{53}}$ அலகுகள்

$$\text{கோணம்} \quad \cos\theta = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$= \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (3)^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\cos\theta = \frac{-20}{\sqrt{14}\sqrt{53}}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-20}{\sqrt{14}\sqrt{53}}\right)$$

18.(இ) $3\vec{i} + 5\vec{j} - 2\vec{k}$ மற்றும் $2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$ என்ற விசைகளின் செயல்பாட்டினால் ஒரு பொருள் $(1, 2, -1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $(5, -3, 4)$ என்ற புள்ளிக்கு இடம் பெயர்ந்தால் விசைகள் செய்த மொத்த வேலை எவ்வளவு.

விடை : *October 2016*-ல் ,பக்கம் எண்: 39 -ல், கணக்கு 18(c) -ல் நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது.

19.(அ) $3\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ மற்றும் $4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ என்ற இரு வெக்டர்களுக்கு செங்குத்தாக உள்ள ஓரலகு வெக்டரைக் காண்க.மேலும் அவ்விரண்டு வெக்டர்களுக்கு இடையேயான கோணத்தின் மதிப்பையும் காண்க.

விடை $\vec{a} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-3 + 4) - \vec{j}(3 - 8) + \vec{k}(-6 + 12)$$

$$= \vec{i}(1) - \vec{j}(-5) + \vec{k}(6)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ \{x = 1, y = 5, z = 6\}$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (5)^2 + (6)^2}$$

$$= \sqrt{1 + 25 + 36}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{62}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ \{x = 3, y = -3, z = 2\}$$

$$= \sqrt{(3)^2 + (-3)^2 + (2)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 9 + 4}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{22}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ \{x = 4, y = -2, z = 1\}$$

$$= \sqrt{(4)^2 + (-2)^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 4 + 1}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{21}$$

$\therefore \hat{n}$ என்பது $\vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ -க்கும் செங்குத்தாக உள்ள ஓரலகு வெக்டர் எனில்

$$\hat{n} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|} = \frac{\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}}{\sqrt{62}}$$

$\therefore \vec{a}$ மற்றும் $\vec{b}$ -க்கு இடையேயான சைன் கோணம் $sin\theta = \frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$

$$sin\theta = \frac{\sqrt{62}}{\sqrt{22}\sqrt{21}}$$

$$\Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{62}}{\sqrt{22}\sqrt{21}}\right)$$

19.(ஆ) $6\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ என்ற விசை (0 , 1 , – 1) என்ற புள்ளி வழியே செலுத்தப்படுகிறது (4, 3, – 1) என்ற புள்ளியைப் பொறுத்து விசையின் திருப்புத்திறன் காண்க.

விடை : *April 2017* -ல் ,பக்கம் எண்:67 -ல், கணக்கு 19(b) -ல் நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது.

19.(இ) $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ மற்றும் $\vec{c} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ எனில் $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

விடை

$$\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}\ ,\ \vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k},$$

$$\vec{c} = -3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-2+2) - \vec{j}(-2-3) + \vec{k}(4+6)$$

$$= \vec{i}(0) - \vec{j}(-5) + \vec{k}(10)$$

$$\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}} = 0\vec{i} + 5\vec{j} + 10\vec{k}$$

$$\vec{\mathbf{a}} \times \left(\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(10+5) - \vec{j}(40+0) + \vec{k}(20-0)$$

$$= \vec{i}(15) - \vec{j}(40) + \vec{k}(20)$$

$$\vec{\mathbf{a}} \times \left(\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{c}}\right) = 15\vec{i} - 40\vec{j} + 20\vec{k}$$

20.(அ) மதிப்பிடுக: (i) $\int (\boldsymbol{x}+\mathbf{1})(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})\,\boldsymbol{dx}$ **(ii)** $\int \boldsymbol{cos^3 x\, dx}$

விடை

(i) $\int (\boldsymbol{x}+\mathbf{1})(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})\,\boldsymbol{dx}$

$$= \int (x^2 + 2x + x + 2)\,dx$$

$$= \int (x^2 + 3x + 2)\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 2x + c$$

விடை

(ii) $\int \boldsymbol{cos^3 x\, dx}$

விடை : *April 2016*-ல் ,பக்கம் எண்: 9 -ல், கணக்கு 14 -ல் நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது.

20.(ஆ) மதிப்பிடுக: (i) $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ **(ii)** $\int \tan^5 x \sec^2 x\, dx$

விடை	$(i)\ \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ ----- (1)
$t = 1 + e^x$ $\frac{dt}{dx} = e^x$ $dt = e^x\,dx$	$(1) \Rightarrow \int \frac{1}{t}\,dt$ $= \log(t) + c$ $= \log(1 + e^x) + c$

விடை	***(ii)*** $\int \tan^5 x \sec^2 x\, dx$ ----- (1)
$t = \tan x$ $\frac{dt}{dx} = \sec^2 x$ $dt = \sec^2 x\,dx$	$(1) \Rightarrow \int t^5\,dt$ $= \frac{t^6}{6} + c$ $= \frac{(\tan x)^6}{6} + c$

20.(இ) மதிப்பிடுக: (i) $\int \frac{dx}{64 - x^2}$ **(ii)** $\int \frac{dx}{\sqrt{36-(5x+1)^2}}$

விடை **(i)** $\int \frac{dx}{64-x^2} = \int \frac{dx}{8^2 - x^2}$

$$= \frac{1}{2(8)} log\left(\frac{8+x}{8-x}\right) + c$$

$$= \frac{1}{16} log\left(\frac{8+x}{8-x}\right) + c$$

விடை

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{36-(5x+1)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(6)^2-(5x+1)^2}}$ -- (1)	
$t = 5x + 1$ $\frac{dt}{dx} = 5$ $dt = 5\,dx$ $\frac{dt}{5} = dx$	$(1) \Rightarrow \int \frac{\frac{dt}{5}}{\sqrt{(6)^2-(t)^2}}$ $= \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{(6)^2-(t)^2}}$ $= \frac{1}{5} sin^{-1}\left(\frac{t}{6}\right) + c$ $= \frac{1}{5} sin^{-1}\left(\frac{5x+1}{6}\right) + c$

21.(அ) மதிப்பிடுக: (i) $\int x \sin 5x\, dx$ (ii) $\int x \log x\, dx$

(i) $\int x \sin 5x\, dx$

விடை : *October 2016* -ல் ,பக்கம் எண்:46 -ல், கணக்கு 21a (ii) -ல் நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது.

விடை

(ii) $\int x \log x\, dx$

$$u = \log x \qquad dv = x\,dx$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \qquad \int dv = \int x\,dx$$

$$du = \frac{dx}{x} \qquad v = \frac{x^2}{2}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x \log x\, dx = \log x \left(\frac{x^2}{2}\right) - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\int x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\log x - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right) + C$$

$$= \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4} + C$$

21.(ஆ) மதிப்பிடுக: $(i) \int x^2 \cos 2x\, dx$ (ii) $\int x^2 e^{-3x}\, dx$

விடை

$(i) \int x^2 \cos 2x\, dx$

$u = x^2$ $u' = 2x$ $u'' = 2$	$\int dv = \int \cos 2x\, dx$ $v = \dfrac{\sin 2x}{2}$ $v_1 = \dfrac{-\cos 2x}{4}$ $v_2 = \dfrac{-\sin 2x}{8}$

$$\int u\, dv = uv - u' v_1 + u'' v_2 - \cdots$$

$$\int x^2 \cos 2x\, dx = \frac{x^2 \sin 2x}{2} - \frac{2x\,(-\cos 2x)}{4} + \frac{2(-\sin 2x)}{8} + c$$

$$= \frac{x^2 \sin 2x}{2} + \frac{x \cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

(ii) $\int x^2 e^{-3x}\, dx$

விடை : *April 2017* -ல் ,பக்கம் எண்:72 -ல், கணக்கு 21b (i) -ல் நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளது.

21.(இ) மதிப்பிடுக: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\ dx$

விடை

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \sec^2 x\, dx - - - - - (1)$$

$t = \tan x$ $\dfrac{dt}{dx} = \sec^2 x$ $dt = \sec^2 x\, dx$ **எல்லைகள் :** $x = 0$ எனும் போது $t = \tan 0 = 0$ $x = \frac{\pi}{4}$ எனும் போது $t = \tan\frac{\pi}{4} = 1$	$(1) \Rightarrow \int_0^1 t\, dt$ $= \left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^1$ $= \dfrac{1^2 - 0^2}{2} = \dfrac{1}{2}$