APRIL 2016

குறிப்பு (1) பகுதி-அ மற்றும் பகுதி-ஆ, ஆகிய ஒவ்வொரு பகுதியிலிருந்து ஏதேனும் ஐந்து வினாக்களுக்கும், மற்றும் பகுதி-இ- ல் ஒவ்வொரு வினாவிலிருந்து ஏதேனும் இரு பிரிவுகளுக்கும் விடையளிக்கவும்.

(2) ஒவ்வொரு வினாவும் பகுதி-அ-ல் 2(இரண்டு) மதிப்பெண்கள், பகுதி-ஆ-ல் 3(மூன்று) மதிப்பெண்கள் மற்றும் பகுதி-இ-ல் ஒவ்வொரு பிரிவும் 5(ஐந்து) மதிப்பெண்கள் பெறும்.

பகுதி - அ

1. $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 = 0$ என்ற வட்டத்தின் மையம் மற்றும் ஆரத்தினைக் காண்க.
2. $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = o$ மற்றும் $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = o$ ஆகிய இரு வட்டங்கள் ஒன்றையென்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்வதற்கான சமன்பாட்டினை எழுதுக.
3. $2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ என்ற வெக்டர் திசையில் ஓரலகு வெக்டரைக் காண்க.
4. (i) $\vec{i}.\vec{i}$ (ii) $\vec{i} \times \vec{j}$ இவைகளின் மதிப்புகளைக் காண்க.
5. மதிப்பிடுக: $[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$
6. மதிப்பிடுக: $\int(x^2 + \sec^2 x)\, dx$. .
7. மதிப்பிடுக: $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$
8. மதிப்பிடுக: $\int_1^2 x^2 dx$

பகுதி - ஆ

9. (1, 1) என்ற புள்ளியின் வழிச் செல்வதும் $x^2+y^2+4x+6y -15 = 0$ என்ற வட்டத்தின் மையத்தை பொது மையமாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.
10. குவியம் (-1, –2) மற்றும் $x + 2y = 0$ என்ற இயக்குவரையைக் கொண்ட பரவளையத்தின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

11. $2\vec{i} + \overrightarrow{3j} + 4\vec{k}$ என்ற வெக்டரின் மட்டு மற்றும் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

12. $2\vec{i} + m\vec{j} - 3\vec{k}$ மற்றும் $3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ ஆகிய இரு வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில், ‘m’ -ன் மதிப்பினைக் காண்க.

13. $2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, 5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ மற்றும் $4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஒரு தளத்தில் அமையும் வெக்டர்கள் என நிரூபி.

14. மதிப்பிடுக: $\int \cos^3 x dx$

15. மதிப்பிடுக: $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$

16. மதிப்பிடுக: $\int xe^{6x} dx$

பகுதி - இ

17. (அ) A[1,2] என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் C[4,6] என்ற புள்ளியை வட்டமையமாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

(ஆ) $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 23 = 0$ மற்றும் $x^2 + y^2 - 2x - 5y + 16 = 0$ ஆகிய இருவட்டங்களும் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன என நிரூபி.

(இ) $2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5x + 5y + k = 0$ என்ற சமன்பாடு இரட்டைக் நேர்கோடுகளைக் குறிக்கிறது எனில் ‘k’-ன் மதிப்பினைக் காண்க.

18. (அ) $2\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$, $4\vec{i} + \vec{j} - \overrightarrow{4k}$ மற்றும் $6\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$ என்ற நிலை வெக்டர்களின் புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை உருவாக்கும் எனக் காட்டுக.

(ஆ) $\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$ மற்றும் $7\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும் என நிரூபி.

(இ) $\overrightarrow{3i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$ மற்றும் $\vec{i} + 7\vec{j} + 7\vec{k}$ என்ற இரு விசைகளின் செயல்பாட்டினால் ஒரு துகள் $\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $3\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$ என்ற புள்ளிக்கு நகர்த்தப்பட்டால், விசைகள் செய்த மொத்த வேலை எவ்வளவு ?

19 (அ) $3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ மற்றும் $5\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ என்ற நிலை வெக்டர்களை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

(ஆ). $5\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ என்ற விசை (2, 1, -3) என்ற புள்ளி வழியே செயல்படும் போது,(4, 3, 2) என்ற புள்ளியைக் பொறுத்து விசையின் திருப்புத்திறன் காண்க.

(இ). $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ மற்றும் $\vec{d} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ எனில், $(\vec{a} \times \vec{b}).\overrightarrow{(\vec{c} \times \vec{d})}$ – ன் மதிப்பினைக் காண்க.

20. (அ) மதிப்பிடுக: $(i)\int (x+1)(2x-3)\,dx$

$(ii) \int cos5x\, cos2x\, dx$

(ஆ) மதிப்பிடுக: $(i)\int (x^2+x+1)^5(2x+1)\,dx$

$(ii)\int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}\,dx.$

(இ) மதிப்பிடுக : (i) $\int \frac{dx}{x^2-36}$ $(ii)\int \frac{dx}{\sqrt{49-(x+5)^2}}$

21. (அ) மதிப்பிடுக:$(i) \int x cos3x\, dx$ $(ii) \int x^2 \log x\, dx$

(ஆ) மதிப்பிடுக: $(i) \int x^2 sin3x\, dx$ $(ii) \int x^2 e^{5x}\, dx$

(இ) மதிப்பிடுக: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\sin x)^2 \cos x\, dx$

விடைகள்

பகுதி - அ

1. $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 = 0$ என்ற வட்டத்தின் மையம் மற்றும் ஆரத்தினைக் காண்க.

விடை

$$x^2 + y^2 + 2x + 2y - 7 = 0 \quad \text{———} (1)$$

$$x^2 + y^2 + \mathbf{2g}x + \mathbf{2f}y + \boldsymbol{c} = 0 \quad \text{———} (2)$$

சமன்பாடு (1) மற்றும் (2) ஒப்பிட கிடைப்பது

$$2g = 2 \qquad 2f = 2$$

$$g = \frac{2}{2} = 1 \qquad f = \frac{2}{2} = 1 \qquad c = -7$$

$\therefore$ மையம் C = $(-g, -f) = (-1, -1)$

ஆரம் r = $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$$r = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 - (-7)}$$

$$= \sqrt{1+1+7} = \sqrt{9} = 3 \text{ அலகுகள்}$$

2. $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = o$ **மற்றும்** $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = o$ **ஆகிய இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்வதற்கான நிபந்தனையைக் கூறுக .**

விடை

இரு வட்டங்கள் செங்குத்தாக வெட்டி கொள்வதற்கான நிபந்தனை $\mathbf{2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2}$

3. $2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ என்ற வெக்டர் திசையில் ஓரலகு வெக்டரைக் காண்க.

விடை

$$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} \Rightarrow x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}$$
$$= \sqrt{4 + 1 + 1}$$
$$= \sqrt{6}$$

ஓரலகு வெக்டர் $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{6}}$

4. . (i) $\vec{i}.\vec{i}$ (ii) $\vec{i} \times j$ இவைகளின் மதிப்புகள் யாவை

விடை (i) $\vec{i} \bullet \vec{i} = 1$ (ii) $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$

5. மதிப்பிடுக: $[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]$

விடை

$$[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1-0) - 0(0-0) + 0(0-0)$$

$$[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] = 1$$

6. மதிப்பிடுக: $\int (x^2 + sec^2 x)\, dx$

விடை $\int (x^2 + sec^2 x)dx = \frac{x^3}{3} + tanx + c$

7. மதிப்பிடுக:: $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

விடை $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}} = sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

8. மதிப்பிடுக: $\int_1^2 x^2\,dx$

விடை

$$\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2$$

$$= \frac{2^3-1^3}{3}$$

$$= \frac{8-1}{3} = \mathbf{\frac{7}{3}}$$

பகுதி - ஆ

9. $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 15 = 0$ **என்ற வட்டத்திற்கு பொதுமைய வட்டமாகவும் (1, 1) என்ற புள்ளி வழியாகவும் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டினைக்காண்க.**

விடை

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 15 = 0$$

பொதுமைய வட்டம் $x^2 + y^2 + 4x + 6y + \mathbf{k} = 0$ —— (1)

(1, 1) என்ற புள்ளி வழியாக வட்டம் (1) செல்வதால்,

⇒அதில் x = 1, y = 1 என(1)ல் பிரதியிடுக,

$$(1)^2 + (1)^2 + 4(1) + 6(1) + \mathbf{k} = 0$$

$$1 + 1 + 4 + 6 + \mathbf{k} = 0$$

$$12 + k = 0 \Rightarrow \mathbf{k = -12}$$

(1)⇒ பொதுமைய வட்டம் $x^2 + y^2 + 4x + 6y - \mathbf{12} = 0$.

10. ஒரு பரவளையத்தின் ஒரு குவியம் (-1, –2) அதன் ஒத்த இயக்குவரை x + 2y = 0 எனில் பரவளையத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

விடை

ஒரு பரவளையத்தைக்கு மையத் தொலைத்தகவு

$$\boldsymbol{e = 1}$$

குவியம் = (–1, –2), இயக்குவரை $x + 2y = 0$

இங்கு $(-1, -2) = (x_1, y_1)$, $l = 1$, $m = 2$, $n = 0$

கூம்பு வளைவின் வரையறையின்படி

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = e^2\left[\pm\frac{lx + my + n}{\sqrt{l^2 + m^2}}\right]^2$$

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 1^2\left[\pm\frac{x + 2y}{\sqrt{1^2 + (2)^2}}\right]^2$$

$$[x^2 + 1^2 + 2(x)(1)] + [y^2 + 2^2 + 2(y)(2)] = \left[\frac{x + 2y}{\sqrt{5}}\right]^2$$

$$x^2 + 1 + 2x + y^2 + 4 + 4y = \frac{(x + 2y)^2}{(\sqrt{5})^2}$$

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 = \frac{(x + 2y)^2}{5}$$

$$5(x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5) = [x^2 + (2y)^2 + 2(x)(2y)]$$

$$5x^2 + 5y^2 + 10x + 20y + 25 - x^2 - 4y^2 - 4xy = 0$$

$$4x^2 - 4xy + y^2 + 10x + 20y + 25 = 0$$

11. $2\vec{i} + \overrightarrow{3j} + 4\vec{k}$ என்ற வெக்டரின் மட்டு மற்றும் திசைக் கொசைன்களைக் காண்க.

விடை

$$\vec{r} = 2\,\vec{i} + 3\vec{j} + 4\,\vec{k} \Rightarrow x\,\vec{i} + y\vec{j} + z\,\vec{k}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{4 + 9 + 16}$$

மட்டு $|\vec{r}| = \sqrt{29}$

திசைக் கொசைன்கள் $\left(\frac{x}{|\vec{r}|}, \frac{y}{|\vec{r}|}, \frac{z}{|\vec{r}|}\right)$

திசைக் கொசைன்கள் $\left(\frac{2}{\sqrt{29}}, \frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}\right)$

12. $2\vec{i} + m\vec{j} - 3\vec{k}$ மற்றும் $3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$ ஆகிய இரு வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனில் ‘m’ -ன் மதிப்பினைக் காண்க.

விடை

$\vec{a} = 2\vec{i} + m\vec{j} - 3\vec{k}$ மற்றும் $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}$

செங்குத்து எனில் $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

$$(2\vec{i} + m\vec{j} - 3\vec{k}) \bullet (3\vec{i} + \vec{j} + 4\vec{k}) = 0$$

$$(2)(3) + (m)(1) + (-3)(4) = 0$$

$$6 + m - 12 = 0$$

$$m - 6 = 0$$

$$m = 6$$

13. $2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, 5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ மற்றும் $4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஒரு தளத்தில் அமையும் வெக்டர்கள் என நிரூபி.

விடை

$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$,

$\vec{c} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$

செங்குத்துஎனில் $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(8 + 6) + 1(20 - 12) + 2(-10 - 8)$$

$$= 2(14) + 1(8) + 2(-18)$$

$$= 28 + 8 - 36$$

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$$

வெக்டர்கள் ஒரு தளத்தில் அமையும் .

14. மதிப்பிடுக: $\int \cos^3 x\, dx$

விடை

$$\cos^3 A = \frac{\cos 3A + 3\cos A}{4}$$

இங்கு $A = x$, $\cos^3 x = \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}$

$$\int \cos^3 x\, dx = \int \frac{\cos 3x + 3\cos x}{4}\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (\cos 3x + 3\cos x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\sin 3x}{3} + 3\sin x\right] + c$$

15. மதிப்பிடுக: $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$

விடை

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5^2-x^2}}$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x}{5}\right) + c$$

16. மதிப்பிடுக: $\int x\, e^{6x} dx$

விடை

$u = x$ என்க

$$\frac{du}{dx} = 1$$

$$du = dx$$

$$\int dv = \int e^{6x} dx$$

$$v = \frac{e^{6x}}{6}$$

$\int u\, dv = uv - \int v\, du$ என அறிவோம்

$$\int x\, e^{6x}\, dx = \frac{x\, e^{6x}}{6} - \int \frac{e^{6x}}{6}\, dx$$

$$= \frac{x\, e^{6x}}{6} - \frac{1}{6}\int e^{6x}\, dx$$

$$= \frac{x\, e^{6x}}{6} - \frac{1}{6}\left(\frac{e^{6x}}{6}\right) + c$$

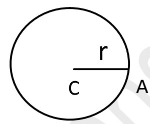
$$= \frac{x\, e^{6x}}{6} - \frac{e^{6x}}{36} + c$$

பகுதி இ

17.(அ) A[1,2] என்ற புள்ளி வழிச் செல்வதும் C[4,6] என்ற புள்ளியை வட்டமையமாகவும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாட்டினைக் காண்க.

விடை

A = (1 , 2) C = (4, 6) என்க



ஆரம் $CA = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

இங்கு $C = (x_1, y_1) = (4 , 6)$; $A= (x_2, y_2) = (1 , 2)$

$$CA = \sqrt{(1-4)^2 + (2-6)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$

$$= \sqrt{25}$$

$= 5$ அலகுகள்

வட்டத்தின் சமன்பாடு $\mathbf{(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2}$

இங்கு r = 5 மற்றும் (h, k) = (4,6)

$$(x-\mathbf{4})^2 + (y-\mathbf{6})^2 = (\mathbf{5})^2$$

$$(x -\mathbf{4})(x -\mathbf{4}) +(y -\mathbf{6})(y -\mathbf{6})= 25$$

$$x^2 - 4x - 4x + 16 + y^2 - 6y - 6y + 36 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 12y + 52 - 25 = 0$$

$x^2 + y^2 - 8x - 12y + 27 = 0$ என்பது

வட்டத்தின் சமன்பாடு ஆகும்.

17.(ஆ) $x^2+y^2-8x+6y-23=0$ **மற்றும்** $x^2+y^2-2x-5y+16=0$ **ஆகிய வட்டங்கள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும் என நிரூபி.**

விடை

$$x^2+y^2-8x+6y-23=0 \text{ ——— } (1)$$

$$x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c=0 \text{ ——— } (2)$$

சமன்பாடு (1) மற்றும் (2) ஒப்பிட கிடைப்பது

$2g_1=-8$	$2f_1=6$	
$g_1=\frac{-8}{2}=-4$	$f_1=\frac{6}{2}=3$	$c_1=-23$

$$x^2+y^2-2x-5y+16=0 \text{ ——— } (3)$$

$$x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c=0 \text{ ——— } (2)$$

சமன்பாடு (3) மற்றும் (2) ஒப்பிட கிடைப்பது

$2g_2=-2$	$2f_2=-5$	
$g_2=\frac{-2}{2}=-1$	$f_2=\frac{-5}{2}=-2.5$	$c_2=16$

நிபந்தனை: $2g_1g_2+2f_1f_2=c_1+c_2$

$$2(-4)(-1)+2(3)(-2.5)=-23+16$$
$$8-15=-7$$
$$-7=-7$$

$\therefore$ எனவே கொடுக்கப்பட்ட இரு வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்கின்றன

17.(இ). $2x^2+3xy-2y^2-5x+5y+k=0$ என்ற சமன்பாடு இரட்டைக் நேர்கோடுகளைக் குறிக்கிறது எனில் 'k'-ன் மதிப்பினைக் காண்க.

விடை

$$2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5x + 5y + k = 0 \text{---}(1)$$

$$ax^2 + 2h\,xy + b\,y^2 + 2g\,x + 2fy + c = 0 \text{---}(2)$$

சமன்பாடு (1) மற்றும் (2) ஒப்பிட கிடைப்பது

a = 2	2h = 3	b = –2	2g = –5	2f = 5	c = k
2a = 4		2b = –4			2c = 2k

$$\therefore \begin{vmatrix} \mathbf{2a} & \mathbf{2h} & \mathbf{2g} \\ \mathbf{2h} & \mathbf{2b} & \mathbf{2f} \\ \mathbf{2g} & \mathbf{2f} & \mathbf{2c} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & 5 \\ -5 & 5 & 2k \end{vmatrix} = 0$$

$$4\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 5 & 2k \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 2k \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$4(-8k - 25) - 3(6k + 25) - 5(15 - 20) = 0$$

$$-32k - 100 - 18k - 75 - 75 + 100 = 0$$

$$-50k - 150 = 0$$

$$-50k = 150$$

$$k = \frac{150}{-50}$$

$$k = -3$$

18.(அ). $2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, $4\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 4\vec{k}$ மற்றும் $6\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - \vec{k}$ என்ற நிலை வெக்டர்களின் புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை உருவாக்கும் என காட்டுக.

விடை

$$\overrightarrow{OA} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}, \quad \overrightarrow{OB} = 4\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 4\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OC} = 6\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - \vec{k}$$ என்க

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AB} = (4\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 4\vec{k}) - (2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k})$

$\overrightarrow{AB} = 4\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 4\vec{k} - 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} - 3\vec{k}$

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 7\vec{k}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2)^2 + (-3)^2 + (-7)^2}$

$= \sqrt{4 + 9 + 49} = \sqrt{62}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{BC} = (6\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - \vec{k}) - (4\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 4\vec{k})$

$\overrightarrow{BC} = 6\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - \vec{k} - 4\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 4\vec{k}$

$\overrightarrow{BC} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}$

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{4 + 16 + 9} = \sqrt{29}$

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{CA} = (2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}) - (6\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - \vec{k})$

$\overrightarrow{CA} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k} - 6\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + \vec{k}$

$\overrightarrow{CA} = -4\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 4\vec{k}$

$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{(-4)^2 + (-1)^2 + (4)^2}$

$= \sqrt{16 + 1 + 16} = \sqrt{33}$

$$\Leftarrow \ |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$$

$$\sqrt{62}^2 = \sqrt{29}^2 + \sqrt{33}^2$$

$$62 = 29 + 33$$

$$62 = 62$$

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தை உருவாக்குகிறது.

18.(ஆ). $\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}, \vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$ மற்றும் $7\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$ ஆகிய வெக்டர்கள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும் என நிரூபி.

விடை

$\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k},\ \vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k},\ \vec{c}=7\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$	
$\vec{a}\bullet\vec{b}=(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})\bullet(\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k})$ $=(1)(1)+(2)(1)+(1)(-3)$ $=1+2-3=\mathbf{0}$	$\therefore \vec{a}\perp\vec{b}$
$\vec{b}\bullet\vec{c}=(\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k})\bullet(7\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k})$ $=(1)(7)+(1)(-4)+(-3)(1)$ $=7-4-3=\mathbf{0}$	$\therefore \vec{b}\perp\vec{c}$
$\vec{c}\bullet\vec{a}=(7\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k})\bullet(\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})$ $=(7)(1)+(-4)(2)+(1)(1)$ $=7-8+1=\mathbf{0}$	$\therefore \vec{c}\perp\vec{a}$
$\vec{a},\vec{b}$ மற்றும் $\vec{c}$ ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை.	

18.(இ) $\overrightarrow{3i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ மற்றும் $\vec{i}+7\vec{j}+7\vec{k}$ என்ற இரு விசைகளின் செயல்பாட்டினால் ஒரு துகள் $\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ என்ற புள்ளியிலிருந்து $3\vec{i}-5\vec{j}+4\vec{k}$ என்ற புள்ளிக்கு நகர்த்தப்பட்டால், விசைகள் செய்த மொத்த வேலை எவ்வளவு ?

விடை

செய்யப்பட்ட வேலை $W=\vec{F}\bullet\vec{d}$

$\vec{F}=\vec{f}_1+\vec{f}_2$ $=(3\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k})+(\vec{i}+7\vec{j}+7\vec{k})$ $=4\vec{i}+9\vec{j}+4\vec{k}$
$\vec{d}=$ முடிவுப்புள்ளி – ஆரம்பப்புள்ளி

$= (3\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}) - (\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$

$= 3\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k} - \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$

$= 2\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}$

செய்யப்பட்ட வேலை W = $\vec{F} \bullet \vec{d}$

$= (4\vec{i} + 9\vec{j} + 4\vec{k}) \bullet (2\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k})$

$= (4)(2) + (9)(-7) + (4)(1)$

$= 8 - 63 + 4$

$= -51$

செய்யப்பட்ட வேலை W = 51 அலகுகள்

19.(அ). $3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ மற்றும் $5\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ என்ற நிலை வெக்டர்ககளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

விடை

$\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$

$\overrightarrow{OC} = 5\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$

$\therefore$ முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{AB} = (2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}) - (3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k} - 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

$\overrightarrow{AB} = -\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}$

$$\overrightarrow{AC} = (5\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}) - (3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k})$$

$$\overrightarrow{AC} = 5\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k} - 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}}$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-20 + 2) - \vec{j}(-4 - 4) + \vec{k}(1 + 10)$$

$$= \vec{i}(-18) - \vec{j}(-8) + \vec{k}(11)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -18\vec{i} + 8\vec{j} + 11\vec{k}$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \{x = -18, y = 8, z = 11\}$$

$$= \sqrt{(-18)^2 + (8)^2 + (11)^2}$$

$$= \sqrt{324 + 64 + 121}$$

$$= \sqrt{509}$$

$\therefore$ முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \boldsymbol{\frac{1}{2}\sqrt{509}}$ சதுர அலகுகள்

19.(ஆ) $5\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ என்ற விசை $(2, 1, -3)$ என்ற புள்ளி வழியே செயல்படும் போது, $(4, 3, 2)$ என்ற புள்ளியைக் பொறுத்து விசையின் திருப்புத்திறன் காண்க.

விடை

திருப்புத்திறன் $= \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}}$

செயல்படும் புள்ளி $= (2, 1, -3)$

புள்ளியைப் பொறுத்து $= (4, 3, 2)$

$\vec{F}$ (விசை)	$\vec{F} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$

$\vec{r}$ = செயல்படும் புள்ளி – புள்ளியைப் பொறுத்து

$= (2, 1, -3) - (4, 3, 2)$

$= (2-4, \quad 1-3, \quad -3-2)$

$\vec{r} = (-2, -2, -5)$

$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -5 \\ 5 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-4-20) - \vec{j}(-4+25) + \vec{k}(8+10)$$

$$= \vec{i}(-24) - \vec{j}(21) + \vec{k}(18)$$

$$\vec{r} \times \vec{F} = -24\vec{i} - 21\vec{j} + 18\vec{k}$$

19.(இ) $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$,
$\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ மற்றும் $\vec{d} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ எனில்
$(\vec{a} \times \vec{b}).(\vec{c} \times \vec{d})$ – ன் மதிப்பினைக் காண்க.

விடை

$\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$, $\quad \vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-1-2) - \vec{j}(2-2) + \vec{k}(2+1)$$

$$= \vec{i}(-3) - \vec{j}(0) + \vec{k}(3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -3\vec{i} - 0\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}, \quad \vec{d} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

$$\vec{c} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i}(-2+3) - \vec{j}(-1-3) + \vec{k}(-1-2)$$

$$= \vec{i}(1) - \vec{j}(-4) + \vec{k}(-3)$$

$$\vec{c} \times \vec{d} = \vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \bullet \left(\vec{c} \times \vec{d}\right)$$

$$= \left(-3\vec{i} - 0\vec{j} + 3\vec{k}\right) \bullet \left(\vec{i} + 4\vec{j} - 3\vec{k}\right)$$

$$= (-3)(1) + (0)(4) + (3)(-3)$$

$$= -3 + 0 - 9$$

$$= -3 - 9 = -12$$

20.(அ) மதிப்பிடுக: (i) $\int (x+1)(2x-3)\, dx$

(ii) $\int \cos 5x \, \cos 2x \, dx$

விடை **(i)** $\int (x+1)(2x-3)\, dx$

$$= \int (2x^2 - 3x + 2x - 3)\, dx$$

$$= \int (2x^2 - x - 3)\, dx$$

$$= \frac{2x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 3x + c$$

விடை **(ii)** $\int \cos 5x \, \cos 2x \, dx$

2 cosA cos B = cos (A + B) + cos (A –B)

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A+B) + \cos(A-B)\}$$

$$\int \cos 5x \cos 2x \, dx = \frac{1}{2}\int \cos(5x+2x) + \cos(5x-2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \cos 7x + \cos 3x \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 3x}{3}\right] + c$$

20.(ஆ) மதிப்பிடுக: (i) $\int (x^2 + x + 1)^5 (2x+1) dx$

(ii) $\int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}\, dx$

விடை	(i) $\int (x^2 + x + 1)^5 (2x+1)\, dx$ ----- (1)
$t = x^2 + x + 1$ $\frac{dt}{dx} = 2x + 1$ $dt = (2x+1)dx$	$\int (x^2 + x + 1)^5 (2x+1)\, dx$ $= \int t^5\, dt$ $= \frac{t^6}{6} + c = \frac{(x^2+x+1)^6}{6} + c$

விடை	(ii) $\int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}\, dx$ ----- (1)
$t = 1 + \tan x$ $\frac{dt}{dx} = \sec^2 x$ $dt = \sec^2 x\, dx$	$\int \frac{\sec^2 x}{1+\tan x}\, dx = \int \frac{1}{t}\, dt$ $= \log(t) + c$ $= \log(1+\tan x) + c$

20.(இ) மதிப்பிடுக: (i) $\int \frac{dx}{x^2-36}$ (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{49-(x+5)^2}}$

விடை

(i) $\int \frac{dx}{x^2-36} = \int \frac{dx}{x^2-6^2}$

$$= \frac{1}{2(6)} log \left(\frac{x-6}{x+6}\right) + c$$

$$= \frac{1}{12} log \left(\frac{x-6}{x+6}\right) + c$$

விடை

(ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{49-(x+5)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(7)^2-(x+5)^2}} \quad — (1)$

$t = x + 5$ $\frac{dt}{dx} = 1$ $dt = 1\, dx$	$\int \frac{dx}{\sqrt{(7)^2-(x+5)^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(7)^2-(t)^2}}$ $= sin^{-1}\left(\frac{t}{7}\right) + c$ $= sin^{-1}\left(\frac{x+5}{7}\right) + c$

21.(அ) மதிப்பிடுக: (i) $\int x \cos 3x\, dx$ (ii) $\int x^2 \log x\, dx$

விடை

(i) $\int x \cos 3x\, dx$

$u = x$ $\frac{du}{dx} = 1$ $du = dx$	$\int dv = \int \cos 3x\, dx$ $v = \frac{\sin 3x}{3}$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int x \cos 3x\, dx = \frac{x \sin 3x}{3} - \int \frac{\sin 3x}{3} dx$$

$$= \frac{x \sin 3x}{3} - \frac{1}{3} \int \sin 3x\, dx$$

$$= \frac{x \sin 3x}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{-\cos 3x}{3}\right) + c$$

$$= \frac{x \sin 3x}{3} + \frac{\cos 3x}{9} + c$$

விடை

(ii) $\int x^2 \log x \, dx$

$$u = \log x \qquad \int dv = \int x^2\, dx$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \qquad v = \frac{x^3}{3}$$

$$du = \frac{dx}{x}$$

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

$$\int x^2 \log x \, dx = \log x \left(\frac{x^3}{3}\right) - \int \frac{x^3}{3}\,\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{x^3}{3}\log x - \frac{1}{3}\int x^2\, dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\log x - \frac{1}{3}\left(\frac{x^3}{3}\right) + C$$

$$= \frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9} + C$$

21.(ஆ) மதிப்பிடுக: $(i) \int x^2 \sin 3x\, dx$ (ii) $\int x^2 e^{5x}\, dx$

விடை

$(i) \int x^2 \sin 3x\, dx$

$$u = x^2 \qquad \int dv = \int \sin 3x\, dx$$

$$u' = 2x \qquad v = \frac{-\cos 3x}{3}$$

$$u'' = 2 \qquad v_1 = \frac{-\sin 3x}{9}$$

$$v_2 = \frac{\cos 3x}{27}$$

$$\int u\, dv = uv - u' v_1 + u'' v_2 - \cdots$$

$$\int x^2 \sin 3x \, dx = x^2\left(\frac{-\cos 3x}{3}\right) - 2x\left(\frac{-\sin 3x}{9}\right) + \frac{2\cos 3x}{27} + c$$

$$= \frac{-x^2 \cos 3x}{3} + \frac{2x \sin 3x}{9} + \frac{2\cos 3x}{27} + c$$

விடை

(ii) $\int x^2 e^{5x}\,dx$

$u = x^2$ $u' = 2x$ $u'' = 2$	$\int dv = \int e^{5x}dx$ $v = \frac{e^{5x}}{5}$ $v_1 = \frac{e^{5x}}{25}$ $v_2 = \frac{e^{5x}}{125}$

$$\int u\,dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$$

$$\int x^2 e^{5x}\,dx = x^2\left(\frac{e^{5x}}{5}\right) - 2x\left(\frac{e^{5x}}{25}\right) + 2\left(\frac{e^{5x}}{125}\right) + c$$

$$= \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} + c$$

21.(இ) மதிப்பிடுக: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\sin x)^3 \cos x\; dx$

விடை

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\sin x)^3 \cos x\; dx \quad \text{-----} \ (1)$$

$t = 2 + \sin x$ $\frac{dt}{dx} = \cos x$ $dt = \cos x\,dx$ **எல்லைகள் :** $x = 0$ எனும் போது $t = 2 + \sin 0$ $t = 2 + 0 = 2$ $x = \frac{\pi}{2}$ எனும் போது $t = 2 + \sin\frac{\pi}{2}$ $t = 2 + 1 = 3$	$(1) \Rightarrow \int_2^3 t^3\,dt$ $= \left[\frac{t^4}{4}\right]_2^3$ $= \left[\frac{3^4 - 2^4}{4}\right]$ $= \frac{81-16}{4} = \frac{65}{4}$